

ADRIANA DRAGOMIR

Prefață

OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XII-a

Cu 10 teste pentru bacalaureat
după modelul M.E.N.C.S.

consolidare

Ediția a II-a

INVATARE DE CONSOLIDARE[®]

antrenament



<i>Prefață</i>	5
Capitolul I. Elemente de algebră	7
1.1. Grupuri	7
1.1.1. Legi de compoziție	7
1.1.2. Grupuri, subgrupuri, reguli de calcul	19
1.1.3. Morfisme și izomorfisme de grupuri	32
1.1.4. Grupuri finite	38
1.1.5. Teste de evaluare	42
1.2. Inele și corpuri	45
1.2.1. Inele, reguli de calcul în inele	45
1.2.2. Corpuri. Morfisme de inele și corpuri	54
1.2.3. Teste de evaluare	57
1.3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ	59
1.3.1. Forma algebrică a unui polinom, funcții polinomiale, operații cu polinoame, teorema împărțirii cu rest, divizibilitate	59
1.3.2. Rădăcini ale polinoamelor, rezolvarea unor ecuații algebrice	64
1.3.3. Teste de evaluare	78
Capitolul II. Elemente de analiză matematică	80
2.1. Primitive	80
2.1.1. Primitivele unei funcții, proprietăți	80
2.1.2. Metode de integrare	88
2.1.3. Teste de evaluare	99
2.2. Integrala definită	101
2.2.1. Sume Riemann, integrabilitate pe un interval compact, proprietăți, formula Leibniz–Newton	101
2.2.2. Proprietăți ale integralei definite, integrarea funcțiilor continue, teorema de medie, metode de integrare, calculul unor limite de șiruri	109
2.2.3. Aplicații ale integralei definite în geometrie	134
2.2.4. Teste de evaluare	141
Capitolul III. Probleme de matematică aplicată	143
Capitolul IV. Modele de teste	150
4.1. Lucrări scrise semestriale	150
4.2. Teste de pregătire pentru examenul de bacalaureat	153
4.2.1. Teste pentru programa M_mate-info	153
4.2.2. Teste pentru programa M_șt-nat și M_tehnologic	160
4.3. Teste de pregătire pentru Olimpiada Națională de Matematică	166
Soluții	171
Capitolul I. Elemente de algebră	171
Capitolul II. Elemente de analiză matematică	202
Capitolul III. Probleme de matematică aplicată	231
Capitolul IV. Modele de teste	237
<i>Bibliografie selectivă</i>	259

CAPITOLUL I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ

1.1. Grupuri

1.1.1. Legi de compoziție

Breviar teoretic

• Lege de compoziție internă (operație algebrică)

Dacă M este o mulțime nevidă, atunci se numește lege de compoziție (internă) pe M orice funcție $f: M \times M \rightarrow M$; dacă (pentru ușurința scrierii) în locul lui f se alege un simbol, de exemplu „ $*$ ”, atunci aceasta este lege de compoziție (internă) pe M dacă pentru orice două elemente x și y ale mulțimii M avem că și $x * y$ este tot un element al mulțimii M . Formalizat, aceasta se traduce prin: $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.

◦ Remarcă: Se mai spune, în aceste condiții, că **operația** „ $*$ ” este lege de compoziție pe mulțimea M .

◦ Observație: Pentru a arăta că o lege nu este internă, e suficient să găsim două elemente $x, y \in M$ pentru care $x * y \notin M$.

• $H \subset M \neq \emptyset$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea „ $*$ ” dacă:

- 1) $H \neq \emptyset$;
- 2) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

• Tabla unei operații

Dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție pe o mulțime finită $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și numărul elementelor acesteia este suficient de mic, se poate alcătui un tabel al compunerii oricăror două elemente:

$*$	a_1	a_2		a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$		$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$		$a_2 * a_n$
...				
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$		$a_n * a_n$

• Proprietăți ale legilor de compoziție

Dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție pe $M \neq \emptyset$, atunci:

- legea este asociativă dacă $x * (y * z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in M$
- legea este comutativă dacă $x * y = y * x, \forall x, y \in M$
- legea are (admite) element neutru dacă $\exists e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in M$

o dacă legea admite și element neutru, notat cu e , atunci un element $x \in M$ se numește simetrizabil dacă $\exists x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$

o Observația 1: Dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție asociativă pe M și dacă „ $*$ ” este internă pe $H \subset M$, atunci „ $*$ ” este asociativă și pe H (proprietatea de ereditate).

o Observația 2: Dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție comutativă pe M și dacă „ $*$ ” este internă pe $H \subset M$, atunci „ $*$ ” este comutativă și pe H .

o Observația 3: Dacă o lege de compoziție „ $*$ ” are elementul neutru e pe $M \neq \emptyset$, atunci e este unicul cu această proprietate (încercați să demonstrați această afirmație!).

o Observația 4: Dacă „ $*$ ” are elementul neutru $e \in M$ și dacă acest element neutru aparține lui $H \subset M$, atunci e este element neutru pentru legea „ $*$ ” pe H .

o Observația 5: Dacă x admite simetric pe x' în raport cu legea „ $*$ ” pe M și dacă $x' \in H \subset M$, atunci x' este simetricul lui x și pe mulțimea H .

o Observația 6: Mulțimea elementelor simetrizabile ale mulțimii M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” se notează cu $U(M)$.

o Observația 7: $U(M)$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea „ $*$ ” și

$$(x * y)' = y' * x', \quad \forall x, y \in U(M).$$

Exerciții și probleme de consolidare

1. Stabiliți care dintre următoarele operații sunt legi de compoziție pe mulțimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;

b) adunarea pe $M = \{2k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

c) înmulțirea pe $M = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;

d) înmulțirea pe $M = \{2k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

e) înmulțirea pe $M = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$;

f) înmulțirea pe $M = \{3k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Stabiliți care dintre următoarele operații **nu** sunt legi de compoziție pe mulțimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{5k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

b) adunarea pe $M = \{5p / p \in \mathbb{Z}\}$;

c) adunarea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

d) înmulțirea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

e) scăderea pe $M = \mathbb{N}$;

f) adunarea pe $M = \{7p / p \in \mathbb{Z}\}$.

3. Din nou: stabiliți care dintre următoarele operații sunt legi de compoziție pe mulțimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) înmulțirea pe $M = \{5p + 1 / p \in \mathbb{Z}\}$;

b) înmulțirea pe $M = \{-1, 0, 1\}$;

c) înmulțirea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^* \text{ fixat};$

c) adunarea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^* \text{ fixat};$

e) adunarea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^* \text{ fixat};$

f) înmulțirea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^* \text{ fixat}.$

4. Studiați (și stabiliți) care dintre următoarele mulțimi P_k sunt părți stabile ale mulțimii numerelor reale în raport cu înmulțirea acestora:

a) $P_1 = \{2k / k \in \mathbb{Z}\};$

b) $P_2 = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\};$

c) $P_3 = \{3k / k \in \mathbb{Z}\};$

d) $P_4 = \{3k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$

e) $P_5 = [0,1];$

f) $P_6 = [-1,0].$

5. Poate vă așteptați acum: stabiliți care dintre următoarele mulțimi P_k **nu** sunt părți stabile ale mulțimii numerelor reale în raport cu înmulțirea acestora:

a) $P_7 = [-1,1];$

b) $P_8 = [-2,2];$

c) $P_9 = \{-1\}$

d) $P_{10} = \mathbb{Q};$

e) $P_{11} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

f) $P_{12} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$

6. Studiați și care dintre următoarele mulțimi P_k sunt părți stabile ale mulțimii numerelor reale în raport cu înmulțirea acestora:

a) $P_{13} = (0, +\infty);$

b) $P_{14} = \{a+b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z}\};$

c) $P_{15} = \{a+b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Z}\};$

d) $P_{16} = \{a+b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\};$

e) $P_{17} = \{a+b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\};$

f) $P_{18} = \{x^2 / x \in \mathbb{Z}\}.$

7. Stabiliți care dintre următoarele operații „*” sunt legi de compoziție pe mulțimea S indicată în fiecare caz:

a) $x * y = x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } S = \{0,1,2,3\};$

b) $x * y = x \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } S = \{0,1,2,3\};$

c) $x * y = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } S = \{0,1,2,3\};$

d) $x * y = \max(x, y), \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } S = \{0,1,2,3\};$

e) $x * y = \min(x, y), \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } S = \{0,1,2,3\};$

f) $x * y = x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ și } S = \{0,1,2,3\};$

8. Arătați că următoarele operații „ $*$ ” sunt legi de compoziție pe mulțimea S indicată în fiecare caz, menți și cărți

a) $x * y = (x, y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*$ (cel mai mare divizor comun)

și $S = \{a \in \mathbb{N} / a \text{ este divizor al lui } 12\}$;

b) $x * y = (x, y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*$ (cel mai mic multiplu comun)

și $S = \{a \in \mathbb{N} / a \text{ este divizor al lui } 12\}$;

c) $x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [1, \infty)$;

d) $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [2, \infty)$;

e) $x * y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [3, \infty)$.

f) $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [4, \infty)$.

9. Același enunț ca la exercițiul 7:

a) $x * y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [5, \infty)$.

b) $x * y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [2, 4]$;

c) $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [3, 5]$;

d) $x * y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $S = [4, 6]$;

e) $x * y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq -1$ și $S = (-1, 1)$.

f) $x * y = \frac{4x+4y}{4+xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq -2$ și $S = (-2, 2)$.

10. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și legile $x \circ y = \max(x, y)$, $x * y = \min(x, y)$, $x \perp y = x + y + xy$.

a) Alcătuiți tabla lui Cayley pentru fiecare dintre aceste legi.

b) Verificați care din aceste operații sunt legi de compoziție pe mulțimea M .

c) Rezolvați în M ecuațiile: $x \circ 2 = 3$; $x \perp 2 = 3$; $x * 2 = 3$.

11. a) Să se arate că mulțimea $H = \{1, \alpha, \alpha^2\}, \alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, este stabilă față de înmulțirea numerelor complexe.

b) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ mulțimea $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* / z^n = 1\}$ este stabilă față de înmulțirea numerelor complexe.

12. a) Să se arate că $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu este stabilă față de înmulțirea numerelor reale.

b) Să se arate că $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ nu este stabilă față de înmulțirea numerelor reale.

13. a) Să se arate că mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ este stabilă față de legea de compoziție definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x \oplus y = \text{restul împărțirii lui } x + y \text{ la } 4$.

b) Să se arate că mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este stabilă față de legea de compoziție definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x \oplus y = \text{restul împărțirii lui } x + y \text{ la } 5$.

14. Să se studieze dacă mulțimea $K = \{f, g\}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

15. Să se studieze dacă mulțimea $L = \{f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_m(x) = mx + (1 - m), m \in \mathbb{R}\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

16. Se notează $A = \mathbb{R}^*$ și se consideră funcțiile $f, g, h, j: A \rightarrow A$ definite prin $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = -x$, $j(x) = -\frac{1}{x}$. Să se arate că mulțimea $\mathcal{J} = \{f, g, h, j\}$ este stabilă față de operația de compunere a funcțiilor.

17. Se consideră mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ și funcțiile $f, g, h: M \rightarrow M$ definite prin $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$, $h(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}$. Să se arate că mulțimea $E = \{f, g, h\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

18. Se notează $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și se consideră mulțimea $\mathcal{K} = \{1_E, u, v, w\}$, unde $u, v, w: E \rightarrow E$ sunt definite prin $u(t) = (x, -y)$, $v(t) = (-x, y)$, $w(t) = (-x, -y)$, $\forall t = (x, y) \in E$. Să se arate că mulțimea $\mathcal{K}$ este stabilă față de operația de compunere a funcțiilor.

19. Să se arate că mulțimea E a matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

20. Să se arate că mulțimea $F = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i \cdot a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

21. Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$ este parte stabilă a lui

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

22. Să se arate că mulțimea $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ este parte stabilă a lui

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor. Puteți determina numărul elementelor mulțimii P ?

23. Să se arate că mulțimea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2m & 4n \\ 5n & 2m \end{pmatrix} / m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

în raport cu adunarea matricelor. Este afirmația adevărată și pentru înmulțirea matricelor?

24. Să se arate că mulțimea $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1+6t & -4t \\ 9t & 1-6t \end{pmatrix} / t \in \mathbb{Q} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

în raport cu înmulțirea matricelor.

25. Se notează cu G mulțimea matricelor $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \frac{\sin t}{2} \\ -2 \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Să se studieze

dacă G este stabilă față de înmulțirea matricelor.

26. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se

arate că $H = \{A, B, C, I_2\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

27. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & ax^2 + bx \\ 0 & 1 & cx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

28. Să se arate că mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1+4g & 0 & 6g \\ 0 & 0 & 0 \\ -2g & 0 & 1-3g \end{pmatrix} / g \in (-1, \infty) \right\}$ este parte stabilă a

lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.