LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR   OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XII-a

Cu 10 teste pentru bacalaureat după modelul M.E.N.C.S.

consolidare

Ediția a II-a

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®

antrenament

Cuprins

CAPITOLUL I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ

1.1. Grupuri

1.1.1. Legi de compoziție

Breviar teoretic

• **Lege de compoziție internă (operație algebrică)**

Dacă M este o mulțime nevidă, atunci se numește lege de compoziție (internă) pe M orice funcție $f: M \times M \to M$; dacă (pentru ușurința scrierii) în locul lui f se alege un simbol, de exemplu „$*$", atunci aceasta este lege de compoziție (internă) pe M dacă pentru orice două elemente x și y ale mulțimii M avem că și $x * y$ este tot un element al mulțimii M. Formalizat, aceasta se traduce prin: $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.

○ Remarcă: Se mai spune, în aceste condiții, că **operația „$*$"** este lege de compoziție pe mulțimea M.

○ Observație: Pentru a arăta că o lege nu este internă, e suficient să găsim două elemente $x, y \in M$ pentru care $x * y \notin M$.

• **$H \subset M \neq \varnothing$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea „$*$"** dacă:

1) $H \neq \varnothing$;

2) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

• **Tabla unei operații**

Dacă „$*$" este o lege de compoziție pe o mulțime finită $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ și numărul elementelor acesteia este suficient de mic, se poate alcătui un tabel al compunerii oricăror două elemente:

$*$	a_1	a_2	....	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	....	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$		$a_2 * a_n$
...	....	......	....	......
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$		$a_n * a_n$

• **Proprietăți ale legilor de compoziție**

Dacă „$*$" este o lege de compoziție pe $M \neq \varnothing$, atunci:

○ legea este asociativă dacă $x * (y * z) = (x * y) * z, \ \forall x, y, z \in M$

○ legea este comutativă dacă $x * y = y * x, \ \forall x, y \in M$

○ legea are (admite) element neutru dacă $\exists e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x, \ \forall x \in M$

○ dacă legea admite şi element neutru, notat cu e, atunci un element $x \in M$ se numeşte simetrizabil dacă $\exists x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$

○ Observaţia 1: Dacă „$*$" este o lege de compoziţie asociativă pe M şi dacă „$*$" este internă pe $H \subset M$, atunci „$*$" este asociativă şi pe H (proprietatea de ereditate).

○ Observaţia 2: Dacă „$*$" este o lege de compoziţie comutativă pe M şi dacă „$*$" este internă pe $H \subset M$, atunci „$*$" este comutativă şi pe H.

○ Observaţia 3: Dacă o lege de compoziţie „$*$" are elementul neutru e pe $M \neq \varnothing$, atunci e este unicul cu această proprietate (încercaţi să demonstraţi această afirmaţie!).

○ Observaţia 4: Dacă „$*$" are elementul neutru $e \in M$ şi dacă acest element neutru aparţine lui $H \subset M$, atunci e este element neutru pentru legea „$*$" pe H.

○ Observaţia 5: Dacă x admite simetric pe x' în raport cu legea „$*$" pe M şi dacă $x' \in H \subset M$, atunci x' este simetricul lui x şi pe mulţimea H.

○ Observaţia 6: Mulţimea elementelor simetrizabile ale mulţimii M în raport cu legea de compoziţie „$*$" se notează cu $U(M)$.

○ Observaţia 7: $U(M)$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea „$*$" şi

$$(x * y)' = y' * x', \ \forall x, y \in U(M).$$

Exerciţii şi probleme de consolidare

1. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;
b) adunarea pe $M = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;
c) înmulţirea pe $M = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;
d) înmulţirea pe $M = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;
e) înmulţirea pe $M = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$;
f) înmulţirea pe $M = \{3k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii **nu** sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{5k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;
b) adunarea pe $M = \{5p / p \in \mathbb{Z}\}$;
c) adunarea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
d) înmulţirea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
e) scăderea pe $M = \mathbb{N}$;
f) adunarea pe $M = \{7p / p \in \mathbb{Z}\}$.

3. Din nou: stabiliţi care dintre următoarele operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) înmulţirea pe $M = \{5p+1 / p \in \mathbb{Z}\}$;

b) înmulţirea pe $M = \{-1, 0, 1\}$;

c) înmulţirea pe $M_n = \left\{\frac{k}{n} / k \in \mathbb{Z}^*\right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

d) adunarea pe $M_n = \left\{ \dfrac{k}{n} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

e) adunarea pe $M_n = \left\{ \dfrac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

f) înmulțirea pe $M_n = \left\{ \dfrac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

4. Studiați (și stabiliți) care dintre următoarele mulțimi P_k sunt părți stabile ale mulțimii numerelor reale în raport cu înmulțirea acestora:

a) $P_1 = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$; b) $P_2 = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

c) $P_3 = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$; d) $P_4 = \{3k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$

e) $P_5 = [0,1]$; f) $P_6 = [-1,0]$.

5. Poate vă așteptați acum: stabiliți care dintre următoarele mulțimi P_k **nu** sunt părți stabile ale mulțimii numerelor reale în raport cu înmulțirea acestora:

a) $P_7 = [-1,1]$; b) $P_8 = [-2,2]$;

c) $P_9 = \{-1\}$ d) $P_{10} = \mathbb{Q}$;

e) $P_{11} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; f) $P_{12} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

6. Studiați și care dintre următoarele mulțimi P_k sunt părți stabile ale mulțimii numerelor reale în raport cu înmulțirea acestora:

a) $P_{13} = (0, +\infty)$; b) $P_{14} = \left\{ a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;

c) $P_{15} = \left\{ a + b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}$; d) $P_{16} = \left\{ a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$;

e) $P_{17} = \left\{ a + b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$; f) $P_{18} = \left\{ x^2 / x \in \mathbb{Z} \right\}$

7. Stabiliți care dintre următoarele operații „$*$" sunt legi de compoziție pe mulțimea S indicată în fiecare caz:

a) $x * y = x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $S = \{0,1,2,3\}$;

b) $x * y = x \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $S = \{0,1,2,3\}$;

c) $x * y = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $S = \{0,1,2,3\}$;

d) $x * y = \max(x, y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $S = \{0,1,2,3\}$;

e) $x * y = \min(x, y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $S = \{0,1,2,3\}$;

f) $x * y = x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $S = \{0,1,2,3\}$;

8. Arătaţi că următoarele operaţii „$*$" sunt legi de compoziţie pe mulţimea S indicată în fiecare caz:

a) $x*y=(x,y), \forall x,y\in\mathbb{N}^*$ (cel mai mare divizor comun) şi $S=\{a\in\mathbb{N} / a$ este divizor al lui $12\}$;

b) $x*y=(x,y), \forall x,y\in\mathbb{N}^*$ (cel mai mic multiplu comun) şi $S=\{a\in\mathbb{N} / a$ este divizor al lui $12\}$;

c) $x*y=xy-x-y+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[1,\infty)$;

d) $x*y=xy-2x-2y+6, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[2,\infty)$;

e) $x*y=xy-3x-3y+12, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[3,\infty)$.

f) $x*y=xy-4x-4y+20, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[4,\infty)$.

9. Acelaşi enunţ ca la exerciţiul 7:

a) $x*y=xy-5x-5y+30, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[5,\infty)$.

b) $x*y=xy-3x-3y+12, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[2,4]$;

c) $x*y=xy-4x-4y+20, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[3,5]$;

d) $x*y=xy-5x-5y+30, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $S=[4,6]$;

e) $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}, \forall x,y\in\mathbb{R}, xy\neq-1$ şi $S=(-1,1)$.

f) $x*y=\dfrac{4x+4y}{4+xy}, \forall x,y\in\mathbb{R}, xy\neq-2$ şi $S=(-2,2)$.

10. Fie mulţimea $M=\{0,1,2,3,4\}$ şi legile $x\circ y=\max(x,y)$, $x*y=\min(x,y)$, $x\perp y=x+y+xy$.

a) Alcătuiţi tabla lui Cayley pentru fiecare dintre aceste legi.

b) Verificaţi care din aceste operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M.

c) Rezolvaţi în M ecuaţiile: $x\circ 2=3$; $x\perp 2=3$; $x*2=3$.

11. a) Să se arate că mulţimea $H=\{1,\alpha,\alpha^2\}, \alpha=\dfrac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$, este stabilă faţă de înmulţirea numerelor complexe.

b) Să se arate că pentru $n\in\mathbb{N}^*$ mulţimea $U_n=\{z\in\mathbb{C}^* / z^n=1\}$ este stabilă faţă de înmulţirea numerelor complexe.

12. a) Să se arate că $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu este stabilă faţă de înmulţirea numerelor reale.

b) Să se arate că $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ nu este stabilă faţă de înmulţirea numerelor reale.

13. a) Să se arate că mulțimea $M=\{0,1,2,3\}$ este stabilă față de legea de compoziție definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x \oplus y =$ restul împărțirii lui $x+y$ la 4.

b) Să se arate că mulțimea $M=\{0,1,2,3,4\}$ este stabilă față de legea de compoziție definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x \oplus y =$ restul împărțirii lui $x+y$ la 5.

14. Să se studieze dacă mulțimea $K=\{f,g\}, f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x, g(x)=1-x$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

15. Să se studieze dacă mulțimea $L=\{f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f_m(x)=mx+(1-m), m\in\mathbb{R}\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

16. Se notează $A=\mathbb{R}^*$ și se consideră funcțiile $f,g,h,j:A\to A$ definite prin $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x}, h(x)=-x, j(x)=-\frac{1}{x}$. Să se arate că mulțimea $\mathcal{J}=\{f,g,h,j\}$ este stabilă față de operația de compunere a funcțiilor.

17. Se consideră mulțimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ și funcțiile $f,g,h:M\to M$ definite prin $f(x)=x, g(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}, h(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}$. Să se arate că mulțimea $E=\{f,g,h\}$ este stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

18. Se notează $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ și se consideră mulțimea $\mathcal{K}=\{1_E,u,v,w\}$, unde $u,v,w:E\to E$ sunt definite prin $u(t)=(x,-y), v(t)=(-x,y), w(t)=(-x,-y)$, $\forall t=(x,y)\in E$. Să se arate că mulțimea $\mathcal{K}$ este stabilă față de operația de compunere a funcțiilor.

19. Să se arate că mulțimea E a matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b\in\mathbb{R}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

20. Să se arate că mulțimea $F=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\cdot a & a \end{pmatrix} / a\in\mathbb{R}, i^2=-1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

21. Să se arate că mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2=1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

22. Să se arate că mulţimea $P=\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{R}, a^2-3b^2=1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Puteţi determina numărul elementelor mulţimii P?

23. Să se arate că mulţimea $S=\left\{\begin{pmatrix} 2m & 4n \\ 5n & 2m \end{pmatrix} / m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu adunarea matricelor. Este afirmaţia adevărată şi pentru înmulţirea matricelor?

24. Să se arate că mulţimea $T=\left\{\begin{pmatrix} 1+6t & -4t \\ 9t & 1-6t \end{pmatrix} / t\in\mathbb{Q}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

25. Se notează cu G mulţimea matricelor $A(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \dfrac{\sin t}{2} \\ -2\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$. Să se studieze dacă G este stabilă faţă de înmulţirea matricelor.

26. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $H=\{A,B,C,I_2\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

27. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care mulţimea $H=\left\{\begin{pmatrix} 1 & x & ax^2+bx \\ 0 & 1 & cx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

28. Să se arate că mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} 1+4g & 0 & 6g \\ 0 & 0 & 0 \\ -2g & 0 & 1-3g \end{pmatrix} / g\in(-1,\infty)\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.